



# UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

## TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Los algoritmos tradicionales de operaciones aritméticas en  
Educación Primaria

Autor/es

MARTÍN PÉREZ HERNÁNDEZ

Director/es

JOSÉ IGNACIO EXTREMIANA ALDANA

Facultad

Facultad de Letras y de la Educación

Titulación

Grado en Educación Primaria

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2019-20



***Los algoritmos tradicionales de operaciones aritméticas en Educación Primaria***, de MARTÍN PÉREZ HERNÁNDEZ

(publicada por la Universidad de La Rioja) se difunde bajo una Licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 Unported. Permisos que vayan más allá de lo cubierto por esta licencia pueden solicitarse a los titulares del copyright.

# TRABAJO FIN DE GRADO

## Título

**Los algoritmos tradicionales de operaciones aritméticas en Educación Primaria.**

## Autor

Martín Pérez Hernández

## Tutores

J. Ignacio Extremiana Aldana

## Grado

Grado en Educación Primaria [206G]

# FACULTAD DE LETRAS Y DE LA EDUCACIÓN

Año académico

2019/2020





## **Resumen.**

Las operaciones aritméticas básicas, como la suma, la resta, la multiplicación y la división, son la primera piedra sobre la que se construyen una gran cantidad de habilidades y destrezas matemáticas en Educación Primaria que servirán, en un futuro, para resolver problemas, tanto académicos, dentro del aula, como en la vida diaria.

El aprendizaje de estas operaciones aritméticas, habitualmente, viene de la mano de su algoritmo tradicional, impuesto a los niños sin dar opción a otras maneras de pensar o razonar desde su primera toma de contacto con esas operaciones básicas y mostrando una escasa o nula evolución en cuanto a la forma de enseñarlo se refiere.

Tras un estudio del currículo y la observación de los índices de fracaso dentro del ámbito de las matemáticas, surgen dos cuestiones: ¿Qué se está haciendo en la asignatura de matemáticas? y ¿qué debería hacerse en la asignatura de matemáticas?

Mediante la investigación de diferentes algoritmos para la resolución de operaciones aritméticas y tras indagar en la base de datos de *Dialnet*, este trabajo busca mostrar diferentes métodos, aplicaciones y estrategias que se podrían utilizar en el aula para enseñar o presentar las operaciones aritméticas básicas

**Palabras clave:** algoritmos, matemáticas, operaciones aritméticas, enseñanza y Educación Primaria.

**Abstract.**

Basic arithmetic operations, such as addition, subtraction, multiplication and division, are the first stone on which a large number of mathematical skills and abilities are built in Primary Education that will serve, in the future, to solve problems, both academics, inside the classroom, as in everyday life.

The learning of these arithmetic operations, traditionally, comes from the hand of its traditional algorithm, imposed on children without giving option to other ways of thinking or reasoning from their first contact with these basic operations and showing little or no evolution in as to how to teach it refers.

After a study of the curriculum and observing the failure rates within the field of mathematics, two questions arise: What is being done in the subject of mathematics? And what should be done in the math course?

By investigating different algorithms for the resolution of arithmetic operations and after inquiring into the *Dialnet* database, this work seeks to show different methods, applications and strategies that could be used in the classroom to teach or present basic arithmetic operations.

**Key words:** algorithms, mathematics, arithmetic operations, teaching and Primary Education.

## Índice.

<b>Introducción.</b>	<b>1</b>
<b>1.- Las operaciones aritméticas en Educación Primaria.</b>	<b>2</b>
1.1.- ¿Qué operaciones aritméticas se tratan en Educación Primaria?	2
1.2.- Significado de las operaciones.	2
1.3.- Tratamiento de los ATOA en el currículo de E.P. Análisis por curso.	5
1.3.- La idea de cantidad. ¿Cómo representamos las cantidades?	8
1.4.- Los números.	8
<b>2.- Procedimientos para realizar operaciones. Algoritmos.</b>	<b>10</b>
2.1.- ¿Qué son los algoritmos?	10
2.2.- Propiedades de los algoritmos.	11
<b>3.- ¿En qué propiedades se basan los ATOA?</b>	<b>13</b>
<b>4.- Forma de enseñanza de los ATOA.</b>	<b>16</b>
4.1.- Pérdida de la importancia de los ATOA.	17
4.2.- Propuestas de modificación de la enseñanza de los ATOA.	17
<b>5.- Propuesta de enseñanza de los ATOA.</b>	<b>17</b>
5.1.- Enseñanza cronológica de los algoritmos.	18
5.2.- Recursos y materiales didácticos.	19
5.4.- Actividades para trabajar en el aula.	21
<b>6.- Conclusiones.</b>	<b>25</b>
<b>7.- Referencias bibliográficas.</b>	<b>27</b>





## **Introducción.**

La sociedad ha experimentado grandes cambios durante estos últimos años gracias, en gran parte, al uso de las nuevas tecnologías. Estamos avanzando hacia una sociedad cada vez más ligada a lo digital y la inteligencia artificial en la que prima la velocidad y precisión de nuestras acciones.

El modelo educativo que prevalece actualmente en las aulas es el basado en enfoques constructivistas, en el cual, los maestros no son solo transmisores de conocimientos, sino que tienen un papel de guía y facilitador de conocimientos y procesos de aprendizaje. El papel principal ya no es del docente, sino que se atribuye a los propios alumnos, responsables y protagonistas ahora de su propio aprendizaje. Los docentes son los responsables de proporcionar las herramientas necesarias para que sus alumnos se desarrollen en el ámbito educativo. Esto puede ser de gran ayuda para los estudiantes, pero también, si no se hace adecuadamente, puede ser perjudicial para ellos ya que les estarán privando de crear sus propias estrategias y herramientas para resolver problemas.

Esto es lo que sucede con la enseñanza de los algoritmos tradicionales de operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación y división) o ATOA. El aprendizaje de los ATOA está dejando de tener la utilidad que antes tenía ya que en muy contadas ocasiones se realizan fuera de las aulas. Hasta tal punto que hay profesionales de la educación que se manifiestan públicamente en contra de su enseñanza.

¿Cuándo fue la última vez que realizamos un cálculo usando bolígrafo o lápiz y papel? Si deseamos realizar un cálculo matemático ciertamente complejo usamos el cálculo mental o bien la calculadora, que es una herramienta más rápida y exacta.

Cabe decir que es esencial que los estudiantes conozcan los ATOA, pero no porque les aporten una mejora en el razonamiento lógico-matemático, sino porque sin ellos no podrán tener éxito en su etapa educativa, ya que son habilidades necesarias para aprobar los exámenes. Pero ni siquiera son el primer camino a tomar por muchos de los alumnos. Al enseñarles los ATOA les hacemos descartar cualquier otro pensamiento a la hora de realizar una operación aritmética que no sea el que se les está enseñando. Pero por lo general no es lo que ellos idean en un principio para resolver una operación. Por ejemplo, a la hora de sumar quieren empezar de izquierda a derecha, en el mismo orden que leen,

pero se les hace ver que están equivocados y se les fuerza a aplicar los algoritmos tradicionales haciéndoles ir contra su propio pensamiento.

## **1.- Las operaciones aritméticas en Educación Primaria.**

La correcta adquisición del manejo de las operaciones aritméticas es un hecho muy importante ya que, además de aparecer dentro del currículo, es esencial para poder avanzar en el aprendizaje. No solo hay que enseñar a los alumnos a usarlas, sino que también hay que dotarlas de un significado. El alumnado debe saber por qué está usando cierta operación aritmética y no otra no solo para aprobar los exámenes venideros, sino porque, además, el darle sentido a las operaciones que realiza le ayudará a formarse como persona y a solventar tareas de su vida diaria.

### **1.1.- ¿Qué operaciones aritméticas se tratan en Educación Primaria?**

Las operaciones aritméticas que se tratan en Educación Primaria son la suma, la resta, la multiplicación y la división.

Si buscamos definiciones de cualquiera de estas operaciones aritméticas, nos explicarán en qué consisten cada una de ellas con detalle, los signos que aparecen en ellas (+, -, \*, /), puede que nos expongan definiciones de autores famosos e importantes en estos temas... pero rara vez responden a las siguientes preguntas:

- ¿A qué idea responden estas operaciones aritméticas?
- ¿Qué es lo esencial de cada una?
- ¿En qué consisten verdaderamente?
- ¿Qué es lo que les podemos decir a los alumnos para que las comprendan?

Cada una de las operaciones aritméticas responden a una idea, a algo por lo que fueron “inventadas”. Gracias a esto podemos saber por qué necesitamos sumar, restar, multiplicar o dividir.

### **1.2.- Significado de las operaciones.**

**Sumar** responde a la idea de **añadir o agrupar**. Cuando decidimos sumar es porque estamos añadiendo valores a un valor que ya tenemos. Por ejemplo: sabemos que si tenemos 10 euros y la suerte nos otorga dos euros más tenemos que añadir esos dos euros

a nuestro valor anterior de 10 euros. Si nuestra amiga tiene dos manzanas y nosotros le damos una manzana más formaremos un grupo de tres manzanas.

La suma se asocia con frases como “me dan”, “gano”, “recibo” ... todas ellas están relacionadas con añadir cosas a algo que ya se tiene.

Saber sumar es esencial a la hora de establecer relaciones entre dos o más números. Resulta esencial hacer ver al niño que, por ejemplo, “12” no es solo el número que se nombra antes del 13 o después del 11, sino que también es la suma de ocho más cuatro, seis más seis... Así puede establecer relaciones complejas entre números de una cifra para llegar a números de dos cifras ya que 12 es igual a seis más seis y seis es igual a tres más dos más uno.

La **resta** responde a lo contrario, ya que estamos **quitando o desagrupando**. Si un niño tiene 20 cromos y pierde ocho, para saber cuántos cromos ha perdido (o cuántos le ha “**quitado**” su despiste) tendremos que restar, deshacer el grupo que antes tenía formado. Antes tenía un grupo de 20 y ahora tiene un grupo de 12 cromos y le falta otro grupo de ocho cromos.

A la resta le corresponden frase como “me quitan”, “pierdo”, “le doy” ... este tipo de frases nos hacen sentir una pérdida, se relacionan con dejar de tener algo.

La resta no es una operación matemática sencilla ya que estamos realizando una acción sobre el total de cosas que tenemos. Por ejemplo: en la operación ocho menos cuatro, ocho representa la cantidad total de cosas que tenemos y cuatro es lo que realizamos sobre el número ocho. Es decir, en la resta, el único número que de verdad existe es el minuendo, los demás son todo partes del mismo.

La **multiplicación** es una operación aritmética que responde a la idea de **repetición**. Si en un paquete de cromos vienen seis cromos y tengo un paquete solo tendré seis cromos, pero si el número de paquetes se **repite** cinco veces averiguaré que tengo 30 cromos. En un paquete hay seis, en el segundo hay seis, en el tercero hay seis... y así sucesivamente, independientemente del número de paquetes que compres, siempre tendrás seis cromos por paquete a no ser que haya algún error en el embalaje. El mismo valor se **repite** un número determinado de veces.

Una de las frases asociadas con la multiplicación es la de “sumar un número repetido de veces una misma cantidad”, la cual me parece muy interesante, ya que habla de la suma dentro de otra operación aritmética.

Ya en 1625, Miguel Gerónimo de Santa Cruz (1625), se refiere a la multiplicación diciendo: *“La cuarta especie de la Aritmética práctica, es el multiplicar, y la tercera regla de las cinco principales, no es otra cosa que breve sumar, y se inventó para sumar con presteza y facilidad, lo que por la primera regla de sumar fuera cosa pesada, y de gran dilación, porque si quisieses sumar 159 varas de terciopelo, por precio de 3450 maravedís cada vara, habías de asentar el número del dicho precio tantas veces como unidades se contienen en las varas de terciopelo, y sumar todas las partidas, para saber el valor del dicho terciopelo, pues mira el tiempo y cansera que sería menester para hacer la tal cuenta, cuanto más, que suceden partidas muy mayores sin comparación: las cuales serían muy dificultosas y tardías de hacer por la primera regla de sumar, como arriba dije. Por tanto, conviene que se hagan las cuentas semejantes por multiplicar (...).”*

**Dividir** responde a la idea de **repartir o de agrupar**. Por ejemplo: si hemos dividido una tarta en 48 trozos iguales y en clase somos 24 ¿Cuántos trozos podrá comerse cada uno como máximo? Si le damos un trozo a cada uno y volvemos a contar veremos que aún nos quedan otros 24 trozos de tarta, por lo que podremos repartir otro trozo a cada uno para que se acabe la tarta. Por lo tanto, cada uno podrá comerse dos trozos de tarta como máximo. Al hacer equipos se divide, al compartir se divide... Dividir es una operación aritmética que está muy presente en nuestras vidas sin darnos cuenta, aunque no sean divisiones exactas. Al planear nuestro horario dividimos las actividades por hora, sabemos la gasolina que nos queda según las líneas de gasolina en las que se divide el depósito nos queden...

Las frases relacionadas con la división comienzan con, por ejemplo, “reparto”, “comparto”, “separo”, “agrupa”, etc.

La división por sí misma, como operación matemática independiente no existe ya que, sin saber multiplicar, difícilmente podremos llegar a dividir. Hay que estudiarla como una operación inversa, pero estrechamente relacionada con la multiplicación.

Estas ideas a las que responden todas las operaciones aritméticas son la esencia de cada una de ellas. Responden a la pregunta de “¿para qué?”, ¿para qué sumamos o restamos?

¿Cuál es la función de lo que estoy haciendo? Puede parecer algo obvio para nosotros, pero para el alumnado son unas ideas que pueden ayudarles mucho a comprender y a darle sentido a lo que están haciendo.

### **1.3.- Tratamiento de los ATOA en el currículo de E.P. Análisis por curso.**

Vamos a proceder a evaluar la importancia que se les da a los algoritmos tradicionales de las operaciones aritméticas en el currículo de Educación Primaria.

La palabra “algoritmos” dentro del B.O.R. (Decreto 24/2014, de 13 de junio) aparece 30 veces en un total de 262 páginas, frente a las 284 veces que aparece la palabra “problemas”.

En la introducción del decreto alude que “el uso de las herramientas matemáticas permite abordar una gran variedad de situaciones”, por lo que puede decirse que uno de los objetivos de las matemáticas es ser útiles, poder usarlas.

#### **1º Educación Primaria.**

En primero de Educación Primaria, en el apartado de contenidos, se establece que los alumnos estudiarán los números hasta el 99, por lo que todos los resultados de sus operaciones deberán ser número mayores que 0 y menores de 100.

Es en esta etapa de Primaria cuando empiezan a realizar sus primeras operaciones aritméticas (suma y resta) con números naturales. Se les enseña el algoritmo de la suma y, después, el algoritmo de la resta. Se le da mucha importancia a que sean capaces de aplicar estas operaciones en contextos de resolución de problemas y que, dichos problemas, sean un reflejo de la vida cotidiana. Además, se estudia la propiedad conmutativa de la suma utilizando números naturales.

Más tarde, también en el apartado de contenidos, podemos ver un punto que habla de la automatización de los algoritmos de la suma y de la resta, los cuales usarán a partir de ese momento para la resolución de problemas que involucren esas operaciones.

Se realiza también, a su vez, en este curso, la iniciación a la multiplicación y al reparto o división. La multiplicación se aborda como “suma de sumandos iguales y viceversa” o lo que es lo mismo: una repetición de valores iguales.

En resumen, en 1º de E.P. se busca que los alumnos comprendan, sobre todo, el algoritmo de la suma y de la multiplicación, ya que es a los que más importancia se les da en el

currículo, dejando en un segundo plano a los algoritmos de la resta y de la división ya que, multiplicar es, básicamente, sumar números iguales un determinado número de veces por lo que podríamos decir que suma y multiplicación están más relacionados entre sí que suma y resta o que multiplicación y división.

## **2º Educación Primaria.**

El primer apartado en 2º de E.P. que tiene que ver con los ATOA nos habla de su utilización en la vida cotidiana y, en concreto, de sumar como “juntar o añadir” y de restar como “separar o quitar”. En el siguiente apartado se relacionan de nuevo los conceptos de multiplicación y de suma de números iguales (repetición).

Es en segundo de primaria cuando se le empieza a dar mayor importancia al cálculo mental exacto y aproximado y a la elaboración de estrategias personales para la realización del último tipo de cálculo nombrado.

En segundo se busca una mayor automatización de los algoritmos de suma y resta para favorecer posteriormente el cálculo mental tanto exacto como aproximado. En este caso creo que es más probable que el cálculo mental vaya más asociado a la memorización de resultados que a la realización de operaciones aritméticas de forma mental con estrategias personales. Creo que, si se introdujeran a la vez los algoritmos tradicionales de la suma y la resta y el cálculo mental, podría favorecerse la creación de estrategias propias ideadas por los alumnos, ya que, si primero se introduce el algoritmo tradicional, se les fuerza a imaginar un “folio en su cabeza” donde resolverían la operación de la misma manera que en el papel. Pensemos por ejemplo en la operación de  $17 \times 25$ . Si se introducen a la vez el cálculo mental y el algoritmo tradicional, cabe que alguien vaya agrupando de cuatro en cuatro los 17 veinticinco  $\rightarrow 100$  (que es  $25 \times 4$ ) +  $100 + 100 + 100$  y les sobra un 25. El resultado es  $400 (16 \times 25) + 25$  (una vez 25, que le sobra para llegar a 17 veinticinco) = 425.

Por otra parte, en segundo, ya elaboran las tablas de multiplicar, las memorizan y aprenden a sumar con llevadas, mientras que en lo que concierne a las restas y a las divisiones no van tan avanzados.

## **3º Educación Primaria.**

En 3º de Educación Primaria se estudian por primera vez los números decimales se relacionan con las fracciones. Estos números decimales se emplean a la hora de realizar

sumas, multiplicaciones y restas, pero aún no se incluyen dentro de las divisiones, ya que los estudiantes solo dividen números naturales.

Por otra parte, se empieza a estudiar la potenciación, que es la multiplicación de un número por sí mismo tantas veces como nos indique el exponente. Es una repetición de multiplicaciones, al igual que la multiplicación era una repetición de sumas de números con el mismo valor.

Es interesante observar lo avanzados que están en el campo de “añadir” o en el de “repetir” comparado con el campo de “repartir” o “quitar”.

#### **4º Educación Primaria.**

Durante este curso también podemos ver la diferencia antes señalada. En 4º de Educación Primaria llegan a ser capaces de multiplicar por números de hasta tres cifras y de realizar potencias al cubo y al cuadrado de base 10. También aprenden a multiplicar y a dividir por la unidad seguida de ceros y se inician en la división de números decimales.

En este punto ya podemos ver que la suma y la resta han pasado a un segundo plano para poder centrarse, sobre todo, en la multiplicación y la división, descubriendo cuáles son los primeros múltiplos de un número y cuáles los divisores menores que 100 de un número dado.

Al final del segundo ciclo de Primaria se inician en el uso de paréntesis en las operaciones para poder jerarquizarlas y saber cuál tiene mayor importancia a la hora de resolver, siendo la multiplicación y la división más importantes que la suma y la resta.

#### **5º Educación Primaria.**

En 5º de Primaria, el temario se centra mucho más en la división, la cual adquiere una gran importancia dentro de los contenidos. Se estudian las fracciones propias e impropias, las fracciones equivalentes, la relación entre fracciones y números decimales, las operaciones con fracciones, los porcentajes... todo esto tiene gran relación con la división.

También cabe decir que en el apartado de “cálculo” dentro de los contenidos se hace un gran repaso de todo lo visto hasta ese momento sobre los ATOA, también se hace referencia la elaboración de estrategias de cálculo mental y el uso de la calculadora.

## **6º Educación Primaria.**

En sexto de Educación Primaria, los alumnos, realizan operaciones con todos los algoritmos anteriormente vistos y se busca la automatización de los mismos para poder realizar operaciones matemáticas complejas con soltura y rapidez.

Se hace hincapié en los conceptos de fracción como relación entre las partes y el todo, la multiplicación como suma de sumandos iguales, la potencia como producto de factores iguales y los componentes y características de la división.

También se menciona la resolución de problemas de la vida cotidiana, la elaboración de estrategias de cálculo mental y el uso de la calculadora.

### **1.3.- La idea de cantidad. ¿Cómo representamos las cantidades?**

Para un primer contacto con las operaciones aritméticas es muy conveniente estar familiarizados con el concepto de cantidad, con saber cuánto tenemos de “algo”. La cantidad se representa con números y, con estos, expresamos las medidas y realizamos las operaciones

### **1.4.- Los números.**

A lo largo de la historia, los números se han representado de diferentes maneras. En la actualidad se utiliza, casi universalmente, el que conocemos como sistema indo-arábigo o decimal, que explicaré, brevemente, un poco más adelante.

Los números según la R.A.E. son la “expresión de una cantidad con relación a su unidad”, es decir, cuánto se tiene de “algo”.

Durante gran parte de la historia se ha intentado establecer una definición que se ajuste a lo que es “el número”, autores como Russell (1969) lo han definido diciendo que “el número es lo característico del número, como el hombre es lo característico de los hombres”, definición que, aunque exacta, aporta poco a la hora de resolver la cuestión de qué es el número.

Huelga decir que sin los números el ser humano no podría sobrevivir, al menos no tal y como lo hace ahora. No sabríamos a qué hora hemos quedado, el portal de nuestro amigo, cuántos años tenemos, la velocidad a la que vamos, los grados de una cerveza o las coordenadas de un punto en el mapa. El ser humano no sería igual sin los números. Pero los números no serían nada sin el ser humano. Somos nosotros los que les damos el “valor” a esos valores. Sabemos que hemos quedado a las ocho horas, que nuestro amigo



vive en el portal número siete, que tenemos 13, 21 o 34 años, que vamos a 56 km/h, que nuestra cerveza tiene 7,2° y que Honolulu se encuentra en la latitud 21.3069401 y longitud -157.8583374, en el hemisferio norte. A partir de una unidad, de algo que tenemos, los números nos hacen ver cuántas veces lo tenemos.

Para representar números en el sistema de numeración decimal, normalmente, planteamos una división en “sectores”, una especie de almacenes que se van llenando a medida que aumenta el valor. El sector más pequeño es el de las unidades, que comprende de los números desde el cero hasta el nueve y se representa como U. Si sumamos uno a esas nueve unidades tendremos 10 unidades, claramente, pero también podemos decir que tenemos cero unidades y una decena (D). Cada 10 unidades se forma una decena, por lo tanto, dos decenas es lo mismo que 20 unidades. Lo mismo sucede respectivamente con las centenas (C) y con los millares (M). Cada 10 decenas formamos una centena y cada 10 centenas formamos una unidad de millar. Por lo tanto, una unidad de millar son 1000 unidades, una centena son 100 unidades y una decena son 10 unidades. Es importante que el alumnado comprenda que tener 10 unidades de algo es lo mismo que tener una decena de esa misma cosa. Que 21 unidades no son solo números y letras, si no que significa que tienes 21 cosas, cromos, por ejemplo. Que tienes un cromo (visto como cromo en general, no uno específico) 21 veces, o que tienes 10 cromos dos veces y, además, tienes un cromo más.

Pongamos un ejemplo:

En el número 1357 podemos distinguir 4 dígitos distintos, el uno, el tres, el cinco y el siete. Cada uno de esos dígitos ocupa un lugar en los anteriormente mencionados sectores. El siete ocupa el lugar de las unidades, el cinco el de las decenas, el tres el de las centenas y el uno el de los millares. Esto nos indica que el número 1357 está compuesto por siete unidades + cinco decenas + tres centenas + una unidad de millar; o lo que es igual  $1000 + 300 + 50 + 7$ . Esto quiere decir que si nos disponemos a sumar  $1357 + 42$ , deberemos realizar la operación sumando unidades más unidades, decenas más decenas, centenas más centenas y millares más millares. Dicho esto, sabemos que al 7 (U) del número 1357 le corresponde el número 2 (U) del número 42 y al 5 (D) le corresponde el 4 (D).

La representación de los números hoy en día, en nuestra sociedad, se hace en el sistema de numeración decimal, que tiene su origen en la India y que llegó a occidente a través de los árabes.

## **2.- Procedimientos para realizar operaciones. Algoritmos.**

### **2.1.- ¿Qué son los algoritmos?**

La palabra algoritmos está estrechamente vinculada a las matemáticas; hemos estudiado matemáticas aprendiendo algoritmos, como, por ejemplo, el de la multiplicación, el de la suma, el algoritmo de la división... todos estos son ejemplos, de algoritmos matemáticos. Pero podemos encontrar más algoritmos dentro de nuestra vida cotidiana como por ejemplo una receta de cocina, el atarnos los cordones o incluso algo tan sencillo como ir al baño. Dicho de una forma coloquial, un algoritmo es una sucesión de pasos que hay que seguir para llegar a un objetivo. Si quisiéramos establecer un algoritmo para conducir nuestro coche de cambios manuales deberemos:

- 1) Ponernos el cinturón.
- 2) Comprobar que la caja de cambios está en punto muerto.
- 3) Arrancar el coche.
- 4) Quitar el freno de mano.
- 5) Pisar el embrague, poner la primera marcha y salir.

Existen una gran variedad de ejemplos de algoritmos en nuestro día a día que nosotros mismos hemos podido crear mediante la observación y experimentación de acciones hasta llegar a una secuencia de pasos que nos permiten realizar una actividad con éxito. Bravo, J. A. F. (2005) apunta que tanto a nivel científico como en la vida real “sin razonamiento lógico sería imposible crear algoritmo alguno; es vital, pero también lo es un gran dominio de la materia y un pensamiento creativo” (p.32).

Fernández (2005), identifica los algoritmos como “el conjunto de una secuencia de pasos operativos para la realización de una tarea o la resolución de un problema” (p.32). Ñabraña (2002) incide en su utilidad: “un algoritmo permite obtener resultados sin tener que justificar los pasos dados” basta con saber cómo funciona un algoritmo, no saber por qué funciona.

Bravo, J. A. F. (2005) distingue entre dos tipos de algoritmos: el algoritmo “sumiso” y el algoritmo “innovador”. El primero es un algoritmo que llevamos a cabo por imposición, por costumbre y sin saber bien lo que se hace y el segundo un algoritmo que llevamos a

cabo por propia voluntad, sabiendo lo que estamos haciendo y por qué lo estamos haciendo.

El quehacer matemático no se basa en saber aplicar una serie de pasos para llegar a cierto resultado, sino en todas las ideas que se relacionan a favor de resolver algo. Existe una gran variedad de caminos a tomar para llegar a un resultado correcto si de verdad se entiende lo que se está haciendo. Por ejemplo, nosotros estamos acostumbrados a multiplicar de cierta manera según los algoritmos tradicionales que se nos han enseñado, pero existen otras formas quizás, más prácticas, para ciertas ocasiones. Texeda, G. de (1546) expone en su trabajo diferentes formas de multiplicar como la multiplicación por escaques, similar al actual algoritmo; la multiplicación por colona, en la que, si uno de los factores era un número pequeño, se operaba como si dicho número solo tuviese una cifra; la multiplicación por croceta para multiplicar dos números con las mismas cifras; la multiplicación japonesa... Por lo tanto, el propio algoritmo debería ser el punto final a la hora de calcular. Los algoritmos deberían ser usados para abreviar el tiempo que nos tome obtener un resultado.

Con esto, el alumnado se plantearía qué es lo que está haciendo, si está multiplicando unidades por unidades, restando centenas... y no simplemente operando con dos números, porque los números por sí solos no significan nada. Ni un niño, ni un adulto sabe qué significa el número cuatro. Sabemos que vivimos en el portal número cuatro ya que lo relacionamos con que antes del nuestro, hay tres portales más, le damos un valor al número cuatro. Los números son símbolos abstractos que no quieren decir nada si no sabemos a qué hacen referencia.

## **2.2.- Propiedades de los algoritmos.**

Según Bermejo, Betancourt y Vela (2009), es deseable que los algoritmos cuenten con las propiedades de especificidad, generalidad y resultabilidad. Con esto se refieren a que cada uno de los algoritmos tienen su propio funcionamiento, que es distintivo y diferenciador de cada uno, que cada algoritmo sirve para resolver operaciones independientemente de las cifras implicadas en él, ya que podemos resolver con el mismo algoritmo (por ejemplo: la suma) las operaciones de “ $32+14$ ” como “ $35+272+321$ ” y además han de tener siempre un resultado al que se llega en un número finito de pasos.

**La suma y la multiplicación:** para entender la suma es básico saber que se trata de un proceso de agrupación, un proceso en el que añadimos o juntamos cosas. Podemos unir o agrupar dos grupos iguales ( $3 \text{ peras} + 5 \text{ peras} = 8 \text{ peras}$ ) o dos grupos diferentes para obtener valores de un mismo conjunto ( $3 \text{ peras} + 5 \text{ manzanas} = 8 \text{ frutas}$ ).

Hay que notar que el total de una suma siempre es mayor que los sumandos siempre y cuando ninguno de estos sea cero. Las principales propiedades del algoritmo tradicional de la suma son las llamadas asociativa y conmutativa.

La propiedad asociativa es compartida por la suma y la multiplicación y se refiere a que el orden en el que realicemos las operaciones para ejecutar el algoritmo no altera el resultado final, por ejemplo:  $3 + (2 + 1) = (3 + 2) + 1 = 6$ .

La propiedad conmutativa también es compartida por la suma y la multiplicación y se refiere a la famosa frase de “el orden de los factores no altera el producto”. Da igual sumar  $3 + 5 + 8$  que  $8 + 3 + 5$  que  $8 + 5 + 3$ , por ejemplo.

Por otra parte, la multiplicación se puede entender como una repetición, una suma de los mismos números una cantidad de veces determinada. Es decir, es lo mismo multiplicar  $5 \times 4$  que sumar  $5 + 5 + 5 + 5$ , en ambos casos el resultado es el mismo: 20.

Resulta esencial entender la multiplicación como la suma de sumandos iguales si se quiere crear un orden a la hora de la enseñanza de los algoritmos elementales.

**La resta:** se entiende por resta toda aquella operación que consista en quitar o suprimir un valor (sustraendo) a otro valor (minuendo). Es la operación contraria a la suma, sobre todo en términos lingüísticos ya que con la suma “das” y con la resta “quitas”, quizás sea por esto que se estudian simultáneamente o, en su defecto, una posteriormente a la otra; pero siempre relacionándolas.

También podemos comprender la resta como un sumando de un número positivo con un número negativo ( $254 + (-34)$ ), pero esto es más complicado y exige la comprensión de los números negativos, que surgieron más tarde que los racionales.

El algoritmo de la resta no comparte propiedades con la suma o la multiplicación ya que no cumple la propiedad conmutativa, no cumple la propiedad asociativa y tampoco es una operación interna en el conjunto de los números naturales como sí lo son la suma y la multiplicación. Esto quiere decir que para que dos números naturales puedan restarse el

minuendo deber ser superior que el sustraendo ya que si no el resultado no pertenecería a los números naturales.

**La división:** un correcto sinónimo de dividir puede ser repartir o agrupar, ya que en eso consiste la división, en repartir un número de cosas (divisor) entre otro (dividendo). El cociente de la división nos mostrará cuántos grupos hemos podido formar, por ejemplo: si tenemos 28 personas y queremos formar equipos para jugar rugby 7 podremos hacer un total de 4 equipos, o lo que es lo mismo, 4 grupos de 7 personas cada uno.

La división está estrechamente relacionada con la resta y con la multiplicación ya que para realizar una división deberemos multiplicar el cociente por el dividendo y este resultado restárselo al divisor. Por lo tanto, si consideramos a la multiplicación como una repetición de sumas de sumandos iguales, podemos llegar a considerar a la división como una repetición de restas de sustraendos iguales. Con esto quiero decir que, por ejemplo:  $7 \times 4 = 7 + 7 + 7 + 7 = 28$ , por lo tanto, la multiplicación es una repetición de sumas, pero que  $28 / 7 = 4$ , que es lo mismo que decir que podemos restar cuatro veces siete al número 28.

### **3.- ¿En qué propiedades se basan los ATOA?**

Las operaciones aritméticas surgen como una interacción entre las diferentes colecciones de objetos: a la hora de sumar estamos juntando dos o más colecciones de objetos, al restar separamos objetos de una colección, al multiplicar juntamos varias colecciones con el mismo número de objetos dentro de ellas y al dividir estamos repartiendo objetos en colecciones del mismo número.

La suma es una operación matemática en la que se unen, al menos, dos cantidades. Esta operación tiene ciertas propiedades características que se cumplen y que ya hemos indicado: la propiedad asociativa, la propiedad conmutativa, el elemento neutro y la propiedad cancelativa (que permite simplificar).

El algoritmo matemático para realizar una suma se basa en dos sencillos pasos:

- 1.- Se suman las unidades del mismo orden (unidades con unidades, decenas con decenas...) empezando por las de orden inferior.
- 2.- Si el primer paso conlleva la creación de una unidad de orden superior, se registra dentro de las unidades del orden inmediatamente superior.

La resta se puede explicar como la acción de quitar elementos o partes a un conjunto. El resultado de la resta muestras los elementos que quedan en un conjunto al quitarle los de

otro. Aunque también se puede ver como lo que hay que añadirle a un conjunto para conseguir otro. La resta guarda relación con la suma, pero a diferencia de esta, la resta no es siempre posible, no es asociativa ni conmutativa y, además, si a los dos componentes de la resta (minuendo y sustraendo) les añadimos o quitamos la misma cantidad, el resultado de la misma no varía, al contrario que en la suma.

Tradicionalmente, en la escuela se explican dos algoritmos distintos: el algoritmo de tomar prestado y el de llevadas.

El algoritmo de tomar prestado consiste en realizar la operación entre elementos del mismo orden cuando sea posible restarlos y, en caso contrario, se debe “tomar prestada” una unidad del orden inmediatamente superior para transformarla en unidades de orden inmediatamente inferior.

El algoritmo de las llevadas consiste en operar, si es posible, entre ellas las unidades del mismo orden, como en el algoritmo anterior, pero en este caso, cuando no sea posible restar las unidades del mismo orden, se añadirán 10 unidades al minuendo y se realiza la resta entre esas unidades para, más tarde “llevar una” al sustraendo de la unidad inmediatamente superior.

Se puede definir a la multiplicación como una suma de colecciones de la misma cantidad o, también, como una sucesión de sumas. La multiplicación está compuesta por factores (las cifras que se multiplican) y el producto (resultado de la operación).

La multiplicación comparte propiedades con la suma, como la propiedad asociativa, conmutativa y el elemento neutro, aunque en este caso, el elemento neutro es “1” y no “0”. Además de estas, la multiplicación cumple la propiedad distributiva respecto a la suma y la resta y el elemento absorbente. La propiedad distributiva es aquella que corrobora que, al multiplicar un número por una suma, el resultado será el mismo que si se suman las multiplicaciones de los términos de la suma por el factor ( $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$ ). El elemento absorbente es aquel que, al multiplicarlo por cualquier número, el resultado será cero. En este caso, al multiplicar, el elemento absorbente es siempre el cero, dado que cualquier número multiplicado por él, da cero ( $a \times 0 = 0$ ,  $(a \times b \times c) \times 0 = 0$ ).

En el algoritmo tradicional de la multiplicación, se utilizan algunas de estas propiedades para poder multiplicar:

La propiedad asociativa ayuda a descomponer la multiplicación en partes más sencillas para que sea más fácil operar con ella:  $7 \times 40 = 7 \times (4 \times 10) = (7 \times 4) \times 10$ . Así, se forma una multiplicación entre dos números de una sola cifra, que se estudian en las tablas de multiplicar ( $7 \times 4$ ) y una multiplicación por una potencia de 10, que es un proceso sencillo ya que solo hay que añadir tantos ceros al producto como tenga esa potencia de 10.

Mediante la propiedad distributiva, dividimos el número entre centenas, decenas, unidades... después de esto, se puede aplicar la propiedad distributiva para operar y, más tarde, sumar los resultados de cada operación:  $5 \times 426 = (5 \times 400) + (5 \times 20) + (5 \times 6)$ . De esta operación se obtendrían 2.000 unidades más 100 unidades más 30 unidades, que se sumarán más tarde para obtener el número 2.130.

En el algoritmo tradicional de la multiplicación se dispone el factor mayor encima del menor y se empieza a multiplicar de derecha a izquierda, escribiendo el producto bajo una línea trazada debajo de los dos factores. Se empieza a multiplicar por el número más a la derecha del factor de abajo (representa la menor unidad) para escribir su producto con el factor de arriba debajo de la línea. Gracias a la propiedad distributiva se puede entender la disposición de los números del producto. Veámoslo con un ejemplo:

2 1 3
x 4 2
-----
4 2 6
8 5 2 0
-----
8 9 4 6

$$42 \times 213 = (40 + 2) \times 213 = (40 \times 213) + (2 \times 213)$$

El producto de las unidades, ( $2 \times 213 = 426$ ), se pone en la primera línea, tomando como referencia las unidades del multiplicando.

El producto de las decenas sería el siguiente:

$$40 \times 213 = (4 \times 10) \times 213 = (4 \times 213) \times 10.$$

Esto explica el porqué los productos se disponen “en escalera” y el motivo de añadir un cero a la derecha o dejar un espacio.

La división consiste en un proceso en el que se reparten elementos de un conjunto. Se divide el dividendo entre un número que indica el tamaño del grupo llamado divisor. El número de grupos que se pueden formar del tamaño del divisor se llama cociente y si ya no se pueden formar más grupos, pero si siguen quedando elementos, tendremos un resto. Por lo tanto, se puede decir que se debe encontrar un número (cociente), que al multiplicarlo por otro (divisor) se acerque lo máximo posible al dividendo, obteniendo el menor resto posible. También se puede ver la división como un proceso en el que tratamos

de averiguar en cuántos grupos (cociente) de un tamaño determinado (divisor) podemos agrupar el grupo principal (dividendo).

Para dividir se suelen utilizar y enseñar dos tipos de algoritmos, uno de aproximación y otro en el que utilizamos la propiedad distributiva. El primero, útil para número pequeños, de dos cifras, consiste en encontrar una multiplicación, que normalmente se encuentra dentro de las tablas de multiplicar, que nos dé como resultado un número cercano o exactamente igual al que estamos buscando:

$$44 = 6 \times 7 + 2$$

$$54 = 6 \times 9 + 0$$


Pero este método, es muy poco útil para números de más de dos cifras ya que no hay números que a simple vista se aproximen a ellos:

$$427 = ?$$

Para resolver este problema, se emplea un algoritmo en el que se usa la propiedad distributiva para “separar” los elementos del dividendo polinómicamente.

$$427 : 6 = (420 : 6) + (7 : 6).$$

De esta forma, se separan las cifras del dividendo comenzando por las cifras superiores que se pueden dividir por el divisor. Si al dividir un valor obtenemos un resto, este se irá sumando a los valores inmediatamente inferiores.

$$438 : 6 = (430 : 6) + (8 : 6) \rightarrow 430 : 6 = (70 + (\text{resto } 10) + (8 : 6))$$

$$438 : 6 = 70 + (18 : 6) \rightarrow 438 : 6 = 70 + 3 = 73$$

#### **4.- Forma de enseñanza de los ATOA.**

Los ATOA se han enseñado mediante repetición de tareas y haciendo hincapié en el procedimiento, en la forma de realizarlos, no en la comprensión de las razones por las que son válidos.

Después del análisis realizado, mi opinión es que el orden que se utiliza actualmente en la enseñanza de los ATOA no es el correcto, ya que, como hemos podido ver, la suma tiene mayor relación matemáticamente hablando con la multiplicación que con la resta, y esta está más ligada a la división que a la suma. Por lo tanto, ¿es correcto imponer a



nuestros alumnos el estudio de los ATOA en el orden suma, resta, multiplicación y división, teniendo en cuenta que el asociar la suma con la multiplicación y la resta con la división puede ser un camino mucho más natural y orgánico?

Quizás en las enseñanzas tradicionales de los algoritmos este tipo de acciones tengan más sentido, usando el lápiz y el papel, pero en el Siglo XXI, teniendo acceso a tanta tecnología, ¿es lo más eficaz seguir enseñando de forma tradicional o ya es hora de plantearse otros métodos? ¿Deberíamos permitir y fomentar el uso de la calculadora y las TIC? ¿Se debe propiciar el autoaprendizaje y el autodescubrimiento a la hora de aprender matemáticas? En lo que sigue, trato de responder a estas preguntas y realizaré alguna propuesta didáctica que conduzca a una mejora enseñanza de los ATOA.

#### **4.1.- Pérdida de la importancia de los ATOA.**

A partir de los años 70, los ATOA han ido perdiendo importancia y su utilidad y eficacia ha sido cuestionada, ya que los alumnos se esfuerzan por recordar los pasos y no por comprender lo que están haciendo. Así lo consideran Bermejo, Betancourt y Vela (2009).

#### **4.2.- Propuestas de modificación de la enseñanza de los ATOA.**

Autores como Bermejo, Betancourt y Vela (2009) exponen que lo mejor sería que los alumnos dispusieran de más de un algoritmo para resolver una misma operación teniendo en cuenta el tiempo del que disponen y los factores implicados dentro de la operación.

Otros autores más constructivistas como Barba y Calvo (2012), exponen que la enseñanza de los ATOA debe seguir en el aula, pero se deben trabajar haciendo hincapié en su comprensión, no solo como un algoritmo para resolver una mera operación matemática. Hay que hacer entender a los alumnos que los ATOA son una de las múltiples alternativas o algoritmos que existen para poder resolver una operación.

La idea de los autores constructivistas se basa en generar problemas que requieran crear nuevas formas de resolverlos para poder generar nuevos algoritmos y, a su vez, reflexionar sobre ellos para saber cómo de eficientes son dependiendo de la situación en la que lo utilicen.

#### **5.- Propuesta de enseñanza de los ATOA.**

Basándome en lo estudiado hasta ahora y en la investigación realizada por distintos autores expertos en este campo, pretendo exponer la manera en la que deberían ser enseñados los algoritmos matemáticos según mi punto de vista.

### **5.1.- Enseñanza cronológica de los algoritmos.**

Hemos podido ver con anterioridad que los algoritmos se enseñan siguiendo el orden de suma, resta, multiplicación y, finalmente, división. Si bien esta es la forma tradicional, puede que no sea la más correcta.

Lo principal para la enseñanza de las operaciones es generar una necesidad para que los alumnos generen sus propios algoritmos y puedan escoger entre los más eficaces para resolver la tarea que se les propone. No sería correcto enseñarles el algoritmo de la división para que lo utilicen para resolver  $12:4$ , sin darle ningún valor a esos números, sino que se deberían buscar situaciones en las que los niños tengan que, por ejemplo, dividir 12 caramelos entre 4 de sus amigos y que al final todos tengan los mismos caramelos.

Con esta idea clara, procedo a explicar cuál sería el orden óptimo de la enseñanza de los algoritmos:

- 1) La suma: la suma es el algoritmo que requiere menor nivel de abstracción y es, por lo tanto, la más sencilla (o menos difícil) de entender.
- 2) La multiplicación: esta operación aritmética está estrechamente relacionada con la suma, ya que se puede decir que es una repetición de sumas.  
Estas dos operaciones están muy relacionadas y comparten muchas propiedades entre sí, es por ello que deberían enseñarse a la vez o, al menos, seguidas.
- 3) La resta: la resta es, posiblemente, la operación más difícil de entender, ya que se necesita un gran nivel de abstracción debido a que, cuando restamos, el único número que realmente existe, es el minuendo, los demás números solo son partes de este. Además, de alguna manera, se está introduciendo a los alumnos a la comprensión de los números negativos, los cuales se aprenden más tarde que los racionales. A pesar de esto, restar resulta indispensable para poder llegar a dividir, por lo tanto, han de saber restar antes de poder introducirse en la división.
- 4) La división: esta operación aritmética no es demasiado difícil de entender, pero requiere del conocimiento de los otros tres algoritmos anteriores para poder llevarla a cabo, por lo tanto, debería ser la última en ser enseñada.

## **5.2.- Recursos y materiales didácticos.**

Lo mejor o más óptimo a la hora de comenzar a estudiar cualquier algoritmo, es empezar con objetos tangibles, físicos y manipulables. Sí, estos objetos serán pensados con estructura que siga las bases del sistema de numeración decimal. Ejemplos de estos podrían ser los bloques multibase, regletas de Cuisenaire, ábacos, etc. Mediante la manipulación de estos objetos, los alumnos podrán crear sus propios algoritmos para resolver problemas. Si no contamos con estos materiales, podemos utilizar otros objetos de la vida cotidiana (pinzas, caramelos, etc.) Además, es importante entender que casi cualquier objeto nos puede servir, o, mejor dicho, les puede servir a los alumnos, para llegar a crear o comprender los algoritmos, ya que se pueden ambientar en situaciones reales de la vida cotidiana (una compra, repartir los gajos de una mandarina) para generar la necesidad de llevar a cabo un algoritmo para resolver una situación.

Se ha de tener en cuenta que el empleo de materiales didácticos dentro del aula, debe ser provechoso, se deben conocer los procesos mentales a los que los alumnos son capaces de llegar, además de conocer el camino para llegar a ellos.

Se deberían favorecer las situaciones en las que se fomente la autonomía e imaginación de los propios niños, antes de llegar a enseñarles los algoritmos de forma icónica o simbólica, ya que, como se ha mencionado anteriormente, el enseñar un algoritmo de forma escrita provoca que los alumnos imaginen un “folio en su cabeza” donde resolverán la operación matemática de la forma que han aprendido, sin plantearse otras posibilidades. El cálculo mental es muy importante a la hora de desarrollar estrategias para la resolución de operaciones aritméticas, por lo que se podrían crear competiciones en las que tengan que resolver el mayor número de operaciones matemáticas en un tiempo determinado, así lograrán encontrar por si mismos algún algoritmo que les permita ser rápidos y precisos.

El conteo con los dedos que tantas veces se ha criticado, es una buena forma de representar cantidades de una forma manipulativa, sin necesidad de escribir los números y que está al alcance de todos los niños que consten de dos manos con cinco dedos en cada una. Les puede ayudar a resolver operaciones sencillas utilizando el cálculo mental apoyándose en un recurso visual y puede ser un primer paso hacia la formación de algoritmos de cálculo mental.

### **5.3.1. Recursos electrónicos.**

El uso de las T.I.C. está cambiando poco a poco los métodos de enseñanza y aprendizaje tanto dentro de las aulas como fuera de ellas, ya que estas pueden ser utilizadas para lograr mejorar la adquisición de contenidos y, además, prepararlos para una sociedad que cada día está más vinculada a lo tecnológico. Asimismo, el uso de las nuevas tecnologías, puede servir para realizar actividades más dinámicas y atractivas para los alumnos, logrando llamar más su atención. Por otra parte, el mundo tan amplio que presentan las T.I.C. puede llevar a nuestros alumnos a una completa distracción, por lo que las actividades deben estar siempre supervisadas y encauzadas para evitar que los alumnos se distraigan.

### **5.3.2. La calculadora.**

El uso de la calculadora está mal visto dentro de muchas de las aulas hoy en día, ya que se cree que es contraproducente y que crea alumnos que, sin ella, no son capaces de realizar operaciones aritméticas. Sin embargo, estudios han demostrado que el utilizar las calculadoras genera una actitud positiva hacia las matemáticas.

Iglesias (2005) apuntaba que la calculadora es un instrumento del día a día, además de barato y de fácil manejo. Añadía que, en la vida diaria, si alguien quiere realizar un cálculo, o bien utiliza el cálculo mental, o bien hace uso de una calculadora, hoy en día es complicado observar a alguien utilizando un papel y un boli o un lapicero.

Por lo tanto, la calculadora es un instrumento que ahorra tiempo, al igual que el cálculo mental, ya que no hay que escribir nada en un papel, pero, además, aporta exactitud a la hora de dar resultados; un ser humano puede equivocarse en una cifra, una calculadora tiene muchas menos posibilidades de hacerlo.

Por último, Iglesias (2005) hace un inciso en cuanto al uso de la calculadora, ya que reconoce que, disponiendo de calculadora, los algoritmos pierden todo uso de razón y dejan de tener sentido. Pero añade que la calculadora no debe, en ningún caso, suplantar la capacidad para calcular y razonar, además de la estimación o el manejar operaciones matemáticas.

#### **5.4.- Actividades para trabajar en el aula.**

No es objeto de este TFG realizar una propuesta detallada de un nuevo modelo de enseñanza de las operaciones elementales para toda la Educación Primaria. En lo que sigue, solo mostraré algunos materiales didácticos y algunas ideas de cómo su utilización puede contribuir a la mejor comprensión de las ideas subyacentes a las operaciones elementales y a que los alumnos puedan elaborar sus propios algoritmos.

Dentro del aula, se pueden trabajar las operaciones aritméticas de diferentes formas y empleando distintos materiales didácticos. A continuación, muestro algunos ejemplos:

##### **1.- Regletas de Cuisenaire (números de colores).**

Con este material, se pueden tratar temas como las operaciones aritméticas básicas, medidas de áreas, volúmenes, etc.

Estas regletas están diferenciadas por colores y tamaños. Cada una representa un número: la más pequeña, con 1 centímetro de longitud representa el número uno, la siguiente, con dos centímetros de longitud, el número dos, etc. La regleta más grande representa el número 10.

De esta manera, podemos trabajar la suma y la resta mediante un ejercicio en el que tengan que representar cierto número con diferentes regletas. Por ejemplo:

¿Cuántas regletas necesitaremos, como máximo, para formar el número ocho?

¿Cuál es el número mínimo de regletas para representar el número ocho?

¿Existen más opciones?

Así, se trabaja la descomposición numérica, ya que, ellos mismos, pueden llegar a la conclusión de que  $8 = 7 + 1 = 4 + 4 = 6 + 2$ , etc.

Además, si al formar el número siete, por ejemplo, utilizan una regleta de seis y una de dos, se darán cuenta de que forman una regleta equivalente a la de ocho, por lo que deberán “quitar” una regleta que tenga el valor de uno. Para ello, deben darse cuenta de que la regleta de dos está formada por dos regletas de valor “uno” ( $1 + 1$ ) o que la regleta de seis está formada por una regleta de valor “cinco” y una de valor “uno” ( $5 + 1$ ).

## **2.- Bloques multibase.**

Los bloques multibase son un recurso utilizado para facilitar la comprensión del sistema de numeración decimal. Estos bloques están compuestos por una cantidad de cubos, barras, placas y bloques concreta. Cada barra equivale a 10 cubos, cada placa a diez barras y cada bloque a 10 placas.

Mediante este material didáctico, se podrían trabajar las multiplicaciones por factores de diez. Por ejemplo: el número 1492 se podría representar como un bloque ( $1 \times 1000$ ) + cuatro placas ( $4 \times 100$ ) + nueve barras ( $9 \times 10$ ) + dos cubos ( $2 \times 1$ ). Así, al multiplicar dos números, los alumnos llegarán a una comprensión distinta de lo que significa multiplicar. Por ejemplo, en la multiplicación  $32 \times 2$ , llegarán a la idea de que tienen dos cubos repetidos  $3 \times 10$  veces +  $2 \times 10^0$  veces. O, dicho de otra manera, que tienen tres placas repetidas dos veces ( $30 \times 2$ ) más dos cubos repetidos dos veces ( $2 \times 2$ ).

## **3.- Pistolero para cálculo mental.**

El juego de los pistoleros, es un juego en el que se requiere de gran velocidad mental para resolver situaciones lo más rápido posible.

Mediante este juego, trabajaremos el cálculo mental de nuestros alumnos.

El juego consiste en que dos alumnos se sitúen espalda con espalda y den tres pasos hacia delante, como en los duelos de vaqueros del oeste. A la cuenta de tres, el maestro dirá una operación matemática acorde con el nivel de la clase. El niño que primero se da la vuelta y diga la respuesta correcta, ganará un punto y volverá a la fila a esperar su turno, mientras que el que ha sido más lento, volverá a jugar para reforzar este contenido.

Con este juego se pretende que los alumnos busquen estrategias para resolver de una manera rápida y precisa las operaciones aritméticas que se les planteen.

## **4.- El ábaco.**

El ábaco es un juego basado en unas varillas sobre las que se deslizan bolas, que son de distinto color y resultan fáciles para manipular. Cada varilla tiene 9 bolas. De izquierda a derecha cada varilla representa unidades, decenas, centenas, unidades de millar, etc.

Objetivos:

- Comenzar de manera manipulativa en el campo de la suma y resta de números naturales.
- Facilitar la representación mental de las operaciones.
- Comprender e intentar razonar de manera muy visual el concepto de suma y resta (en la suma, el alumno, pone bolas y en la resta quita un determinado número de bolas)
- Razonar sobre qué son los números naturales y hacer que los alumnos entiendan que, aunque sumemos o restemos números naturales, siempre nos va a quedar otro número natural y con posibilidad de representar en el ábaco.

**Actividad 1:** María tiene 24 manzanas si le regala a su amigo 12. ¿Cuántas le quedan?  
Representación en el ábaco.

**Actividad 2:** Resuelve las siguientes operaciones con la ayuda del ábaco:

$$1235 + 628 =$$

$$4589 + 34 =$$

$$7689 - 4523 =$$

## 5.- Triminó.

El triminó, al tener 3 lados en lugar de 2, ofrece más posibilidades de combinación que el dominó. Puede asociarse por 1, 2 o 3 lados de cada ficha. Consiste en asociar dos operaciones con el mismo resultado.

Objetivos:

- Desarrollar la aptitud numérica, la memoria y la organización espacial.
- Trabajar la concentración y el razonamiento estratégico.
- Promover el cálculo mental, ubicación espacial y destreza en operaciones básicas.
- Resolver y manejar fácilmente la suma y la resta.

**Actividad 1:** Organizarse en grupos de cuatro. Una vez organizados los grupos, los alumnos deben realizar las operaciones que se presentan en el triminó (sumas y restas). El grupo que consiga terminar el triminó en menos tiempo, será recompensado con una medalla de papel hecha por ellos mismos.

**Actividad 2:** Los alumnos por equipos pueden desordenar las fichas de triminós y hacer asociaciones que son erróneas como por ejemplo decir que  $4 + 2 = 8$ , y los alumnos del

otro equipo deberán de saber dónde han cometido errores los del otro equipo revolviendo las fichas en un tiempo limitado. Gana el equipo que consiga ver todos los errores del otro equipo.



## **6.- Conclusiones.**

A lo largo de un gran periodo de tiempo, la enseñanza de las matemáticas en la escuela se ha centrado la resolución de las operaciones aritméticas en el aprendizaje de los cuatro algoritmos tradicionales, pero esta manera de actuar se ha puesto en duda en las últimas décadas del siglo pasado, ya que sus beneficios didácticos no son muy abundantes.

Para poder llegar a comprender o elaborar algoritmos, resulta fundamental que nuestros alumnos ya hayan adquirido y comprendido ciertos conocimientos previos, como la idea de cantidad, sin los que resulta imposible que lleguen a comprender los algoritmos.

Basándome en lo estudiado, observo que existen otros caminos de realización de operaciones matemáticas a los que habría que darles una mayor importancia y relevancia, como pueden ser el cálculo mental, la elaboración personal de algoritmos propios inventados por el alumno, el uso de la calculadora, la utilización de materiales didácticos o, incluso, de sus propios dedos, etc. Todos estos recursos, si se trabajan de la forma apropiada, mejorarán los procesos de aprendizaje del alumnado.

Los ATOA, no deben desaparecer de las aulas, no es algo que se deba eliminar ni que resulte contraproducente por sí mismo. Por otra parte, habría que tratarlos como uno de los múltiples caminos que existen para poder resolver una operación matemática, son un medio, no el fin del aprendizaje.

Se debe priorizar la comprensión de las ideas, que los alumnos sepan qué y por qué están sumando, restando, multiplicando o dividiendo sobre la mecanización de los algoritmos de esas operaciones matemáticas. Considero mucho más importante que un alumno sea capaz de explicar por qué está realizando una suma, aunque esa suma no le salga bien, antes que sea capaz de resolver una gran cantidad de sumas en muy poco tiempo y con exactitud, pero sin saber muy bien por qué está sumando y por qué no debería estar multiplicando. La precisión irá mejorando con la práctica, la comprensión es el primer paso que hay que seguir.

Se debe investigar sobre la elaboración de planteamientos didácticos que refuercen y favorezcan la creación de estrategias propias de cálculo, las cuales sean capaces de beneficiar a los alumnos en cuanto a su comprensión del concepto de los algoritmos y cómo deben proceder para poder resolverlos.

Como conclusión final, opino que seguir enseñando los ATOA como se ha hecho hasta ahora, de forma mecánica y con pocos beneficios didácticos sería una decisión que, desde el punto de vista didáctico, estaría equivocada. Además, según nos ha demostrado la historia de la Educación, estaríamos hablando de repetir un proceso del que no se obtienen todos los beneficios que se podrían obtener.

Hay que saber diferenciar entre saber operaciones matemáticas y saber cómo y cuándo realizar operaciones aritméticas.

## 7.- Referencias bibliográficas.

- Barba Uriach, D. y Calvo, C. (2012). Algoritmos antiguos de cálculo. *Cuadernos de pedagogía*, 421, 62-65.
- Bermejo, V.; Betancourt, S. y Vela, E. (2009). Los algoritmos. En Bermejo, V. (Coord.), *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor* (pp. 193-214). Madrid: Editorial CCS
- Bravo, J. A. F. (2005). Avatares y estereotipos sobre la enseñanza de los algoritmos en matemáticas. *Junta de Gobierno de la FISEM*, 31.
- De Texeda, G. (1546). *Suma de arithmética práctica y de todas Mercaderías con la Horden de contadores*. Valladolid: Francisco Fernández de Córdoba.
- Decreto 24/2014, de 13 de junio, por el que se regulan los contenidos de Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de La Rioja. BOR nº 74, de 16 de junio de 2014.
- Godino, J. D., Font, V., & Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, (Esp), 131-155.
- Iglesias Pérez, J.M. (2005). Los algoritmos tradicionales y otros algoritmos. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, 4, 47-49.
- Meavilla Seguí, M. y Oller Marcén, A.M. (2014). Gaspar de Texeda y los algoritmos de la multiplicación. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 75, 61-73.
- Miguel Gerónimo de Santa Cruz (1625). *Libro de Arithmetica especvlativa, y practica, intitvlado, el Dorado Contador*.
- Ñabraña, A. (2002). Algoritmos e Matemáticas. *Eduga: revista galega do ensino*, 34, 147-166.
- Roa Guzmán, R. (2007). Algoritmos de cálculo. En Castro Martínez, E. (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 231-256). Madrid: síntesis.

